4 Mejora de la imagen en el dominio de la frecuencia

Comprender bien el área de la mejora de la imagen es imposible sin conocimiento del funcionamiento de la transformada de Fourier y los usos del dominio de la frecuencia en el procesamiento de imágenes.

Se intentará enfocarse en los fundamentos y su relevancia, enfatizando en la conexión entre las características de la imagen y las herramientas matemáticas utilizadas para representarlas.

Se verán brevemente los orígenes de la transformada de Fourier y su impacto, después una introducción a la transformada de Fourier y al dominio de la frecuencia, seguido de secciones que tratarán las mismas técnicas del capítulo anterior, pero en el dominio de la frecuencia.

4.1 Antecedentes

En el año de 1768 nació el matemático Jean Baptiste Joseph Fourier. Su contribución más recordada fue publicada en 1822 bajo el título *La théorie Analitique de la Chaleur* (teoría analítica del calor).

Series de Fourier

La idea más importante de este trabajo es que *toda función que se repite periódicamente puede ser expresada como la suma de senos y/o cosenos de diferentes frecuencias, cada uno multiplicado por un coeficiente diferente.* Ahora llamamos a esta suma *Serie de Fourier*.

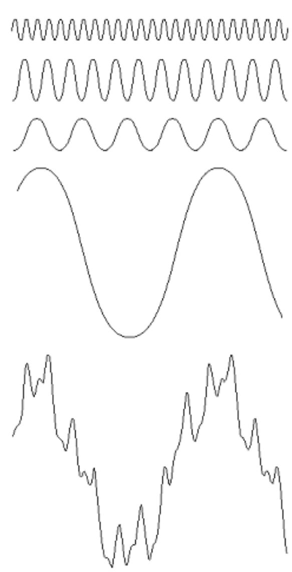


Fig 4.1 Descomposición de una onda en una suma de funciones senoidales y cosenoidales

Transformada de Fourier

Aún funciones que no son periódicas (pero con un área finita bajo la curva) pueden ser expresadas como la integral de senos y/o cosenos multiplicada por una función de ponderación. Esta es la *transformada de Fourier*, y su utilidad es aún más grande que la de las series de Fourier en muchos problemas prácticos.

Las 2 representaciones comparten la importante característica de que una función, expresada en series de Fourier o la transformada, pueden ser reconstruídas (recobradas) completamente por un proceso inverso sin perder información.

La utilidad de las series y transformada de Fourier para resolver problemas prácticos las ha hecho ampliamente utilizadas y estudiadas como herramientas fundamentales.

El advenimiento de la computación digital y el "descubrimiento" del algoritmo la transformada rápida de Fourier (FFT) a finales de los cincuentas revolucionó el campo del procesamiento de señales.

Se utilizarán solamente funciones de duración finita (imágenes), así que nos concentraremos en la transformada de Fourier.

4.2 Introducción a la transformada de Fourier y el dominio de la frecuencia

En esta sección se introduce la transformada de Fourier en una y dos dimensiones. Nos enfocaremos en especial en la formulación discreta de la transformada contínua y algunas de sus propiedades.

4.2.1 La transformada de Fourier en una dimensión y su inversa

La transformada de Fourier F(u) de una función contínua de una sola variable, f(x), se define con la ecuación

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-j2\pi ux}\, dx \qquad (4.2\text{-}1)$$

donde j = SQRT(-1). De manera correspondiente, dada F(u), podemos obtener f(x) por medio de la transformada de Fourier inversa

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{j2\pi ux}\, du \qquad (4.2\text{-}1)$$

Estas 2 ecuaciones comprenden el *par de transformadas de Fourier*. Es decir que una función puede ser recuperada a partir de su transformada.

Como veremos más tarde, estas ecuaciones pueden fácilmente extenderse a 2 variables, u y v:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, e^{-j2\pi(ux + uy)}\, dxdy \qquad (4.2\text{-}3)$$

y, similarmente para la transformada inversa

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u, v)\, e^{j2\pi (ux + uy)}\, dudv \qquad (4.2\text{-}4)$$

Nosotros estamos interesados en funciones discretas. La transformada de Fourier de una función discreta de una variable, f(x), cuando x = 0, 1, 2, ... , M-1, está dada por la ecuación

$$F(u) = {}^{1}/_{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{-j2\pi ux/M} \qquad (u = 0, 1, ..., M-1) \qquad (4.2\text{-}5)$$

Esta *transformada de Fourier discreta* (o DFT, por sus siglas en inglés), es la base del resto de este capítulo. Similarmente, dada F(u), podemos obtener la función original usando la DFT inversa:

$$f(x) = \sum_{x=0}^{M-1} F(u)\, e^{\,j2\pi ux/M} \qquad (x = 0, 1, ..., M-1) \qquad (4.2\text{-}6)$$

Para obtener F(u) en (4.2-5) comenzamos por sustituír u = 0 en el término exponencial y después sumamos para TODOS los valores de x. Después sustituímos u = 1 en el exponencial y repetimos la suma para todos los valores de x. Se repite este proceso para los M valores de u y de esta manera se obtiene la DFT.
Como f(x), la transformada es una cantidad discreta, y tiene el mismo número de componentes que f (x).

El mismo proceso aplica para calcular la DFT inversa.

Ejercicio 4.1
Calcular la transformada discreta de Fourier de
f(x) = x para x = 0, 1
y la DFT inversa del resultado F(u)

Una propiedad importante del par de transformadas discretas es que *la transformada discreta de Fourier y su inversa siempre existen*.

El dominio de la frecuencia

El concepto de dominio de la frecuencia, se puede derivar fácilmente de la fórmula de Euler:

$$e^{\,j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta \qquad (4.2 – 7)$$

Sustituyendo en (4.2-5) y recordando que $\cos -\theta = \cos\theta$ y $\sin -\theta = -\sin\theta$, obtenemos

$$F(u) = {}^{1}/_{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, [\cos 2\pi ux / M – j \sin 2\pi ux / M] \qquad (4.2\text{-}8)$$

para u = 0, 1, 2, 3, ... , M – 1 . Así, observamos que cada término de la transformada de Fourier (es decir, el valor de F(u) para cada valor de u) se compone de la suma de todos los valores de la función f(x).
A su vez, los valores de f(x) son multiplicados por senos y cosenos en varias frecuencias.

El dominio (valores de u) para el que el rango son los valores de F(u) es llamado, apropiadamente, *dominio de la frecuencia*, porque u determina la frecuencia de los componentes de la transformada.

Cada uno de los M términos de f(u) se llama *componente de frecuencia* de la transformada.

El uso de los términos dominio de la frecuencia y componentes de frecuencia es equivalente a dominio del tiempo y componentes del tiempo que usaríamos para expresar el dominio y valores de f(x) si x fuera una variable de tiempo[1].

En general, vemos en las ecuaciones (4.2-5) y (4.2-8) que los componentes de la transformada de Fourier son cantidades complejas. A veces será conveniente manejar F (u) en coordenadas polares:

$$F(u) = |F(u)|e^{-j\Phi(u)} \qquad (4.2-9)$$

donde

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2} \qquad (4.2-10)$$

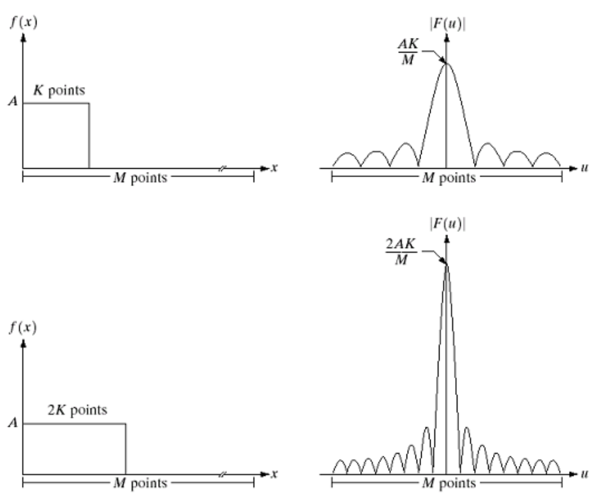
es llamado *magnitud* o *espectro* de la transformada de Fourier, y

$$\Phi(u) = \tan^{-1} [\, I(u) / R(u) \,] \qquad (4.2-11)$$

es llamado *ángulo de fase o espectro de fase* de la transformada. En las ecuaciones (4.2 – 10 y 4.2 – 11) R (u) e I (u) son las partes real e imaginaria de F(u), respectivamente.
En términos de mejora de la imagen nos conciernen primariamente las propiedades del espectro.

La *densidad espectral* es el cuadrado del espectro de Fourier:

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u) \qquad (4.2-12)$$



4.2 Una función discreta de M puntos, con k puntos con valor A, y su transformada y una función con el doble de puntos con valor A y su transformada

[1] Una analogía muy útil es comparar la transformada de Fourier a un prisma de vidrio. El prisma es el dispositivo físico que separa la luz en sus componentes de color, cada uno dependiendo de su contenido en longitud de onda (o frecuencia). La transformada de Fourier puede ser vista como un "prisma matemático" que separa una función en sus componentes, también basada en sus frecuencias.
Similarmente, la transformada nos permite caracterizar una función por su contenido en frecuencia.

Dada la relación inversa entre una función y su transformada ilustrada en la figura 4.2, no es sorprendente que Δx y Δu estén inversamente relacionadas por la expresión

$$\Delta u = 1 / M\Delta x$$

Esta medida es útil cuando las medidas son importantes en las imágenes procesadas. Por ejemplo, en una aplicación de microscopía electrónica las muestras de la imagen podrían estar espaciadas una micra entre ellas, y ciertas características del dominio de la frecuencia (como los componentes periódicos) pueden tener implicaciones con respecto a la estructura de la muestra física.

4.2.2 La DFT bidimensional y su inversa

La transformada discreta de Fourier se extiende fácilmente a 2 dimensiones:

$$F(u,v) = {}^{1}/_{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)\, e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)} \quad (u=0,1,\ldots,M-1;\ v=0,1,\ldots,N-1) \qquad (4.2\text{-}16)$$

su inversa:

$$f(x, y) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u,v)\, e^{\,j2\pi(ux/M+vy/N)} \qquad (x=0,1,\ldots,M-1;\ y=0,1,\ldots,N-1) \qquad (4.2\text{-}17)$$

Donde u y v son las variables de transferencia o frecuencia y x e y son las variables espaciales o de imagen.

El espectro de Fourier, ángulo de fase y espectro de frecuencia se deducen también con facilidad:

$$|F(u,v)| = [R^2(u,v) + I^2(u,v)]^{1/2} \qquad (4.2-18)$$

$$\Phi(u,v) = \tan^{-1} [\, I(u,v) / R(u,v)\,] \qquad (4.2-19)$$

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u) \qquad (4.2\text{-} 20)$$

Usualmente se multiplica la imagen por $(-1)^{x+y}$. Esto resulta en:

$$\mathfrak{F}\, [f(x, y)\, (-1)^{x+y}] = F\, (u - M/2,\ v - N/2) \qquad (4.2 - 21)$$

Esta ecuación nos dice que el origen de la transformada de Fourier de $f(x, y)\,(-1)^{x+y}$ se localiza en $u = M/2$, $v = N/2$, lo que pone el origen al centro del área MxN que ocupa la DFT bidimensional. Esta área es llamada *rectángulo de frecuencia*.

Se requiere que M y N sean impares para que las coordenadas del centro sean enteros.

El valor de la transformada en (u, v) = (0, 0) es:

$$F(0,0) = {}^{1}/_{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \qquad (4.2\text{-}22)$$

el cuál es claramente el promedio de f(x, y), lo que quiere decir que el valor de la DFT en el origen es igual al nivel de gris promedio de la imagen.

Como las frecuencias son cero en el origen, F(0, 0) a veces es llamado el componente dc (de corriente directa, cero frecuencia).

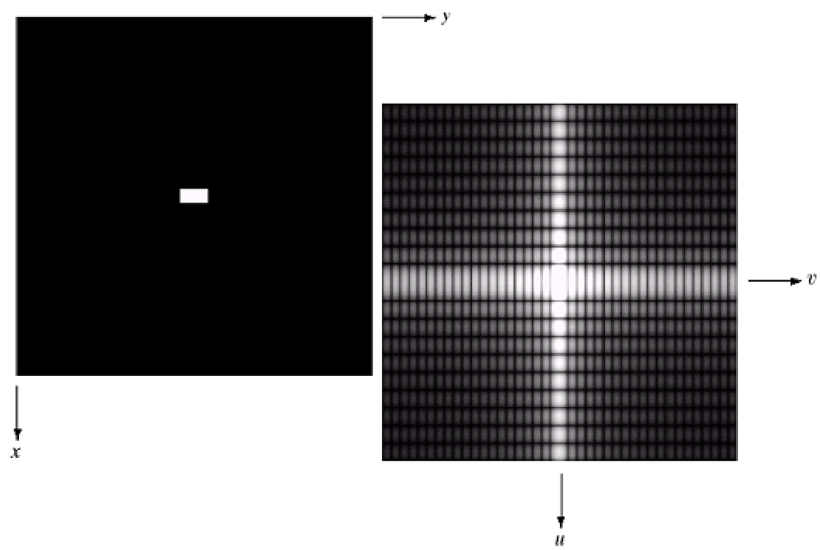
Además, el espectro de la transformada de Fourier es simétrico

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)| \qquad (4.2-23)$$

y también se cumplen las siguientes relaciones:

$$\Delta u = 1 / M\Delta x$$

$$\Delta v = 1 / N\Delta y$$



4.3 Un rectángulo blanco sobre fondo negro y el espectro de Fourier de la imagen premultiplicada por $(-1)^{x+y}$ y posprocesada con el logaritmo para ver detalles de los niveles oscuros de gris.

4.2.3 Filtrado en el dominio de la frecuencia

Como ya se ha dicho, el dominio de la frecuencia no es más que el espacio definido por los valores de la transformada de Fourier y sus variables de frecuencia (u, v).

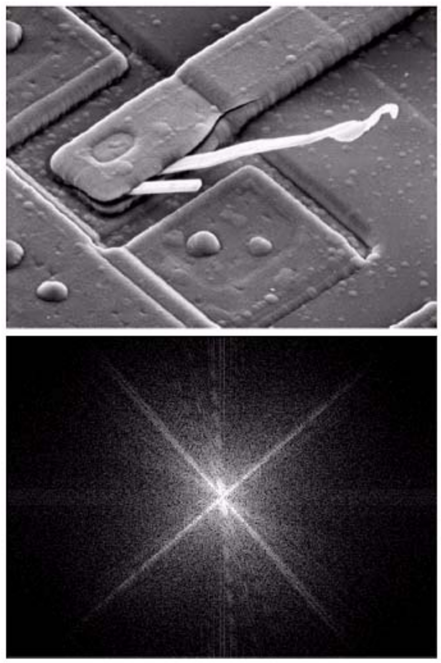
Propiedades básicas del dominio de la frecuencia

Recuérdese que cada uno de los término de F(u, v) contiene todo los valores de f(x, y), modificados por los valores de los términos exponenciales.

Debido a esto, es usualmente imposible hacer asociaciones directas entre componentes específicas de una imagen y su transformada.
Sin embargo se pueden hacer algunas observaciones generales acerca de la relación entre los componentes de frecuencia de la FT y características especiales de la imagen:

Ya que la frecuencia se relaciona directamente con la velocidad de cambio, no es difícil asociar intuitivamente frecuencias de la transformada de Fourier con patrones de variación de intensidad de una imagen.

- El componente de frecuencia que varía más lentamente (u = v = 0) corresponde al nivel de gris promedio.
- Al alejarnos del origen, las frecuencias bajas corresponden a componentes que varían lentamente.
- Lejos del origen, las frecuencias altas corresponden a cambios cada vez más rápidos en el nivel de gris e la imagen (p. Ej. Bordes, o ruido).



4.4 Imagen de un circuito integrado con daño termal inducido y su espectro de Fourier

En la imagen podemos ver un circuito integrado dañado (la parte blanca es óxido resultado del daño termal inducido). Varios detalles de la imagen pueden relacionarse con lo que vemos en su espectro de Fourier.

Los bordes prominentes corriendo a 45º y las 2 prominencias blancas de óxido corresponden a los componentes del espectro con direcciones de 45º y, a la izquierda del eje vertical un componente que sale un poco a la izquierda.

Ideas básicas del filtrado en el dominio de la frecuencia

El filtrado en el dominio de la frecuencia consiste en los siguientes pasos:

1. Multiplicar la imagen de entrada por $(-1)^{x+y}$ para centrar la transformada.
2. Calcular F(u, v), la DFT de la imagen en el paso 1.
3. Multiplicar F(u,v) por una función de filtro H(u,v)
4. Calcular la transformada inversa del resultado del paso 3.
5. Obtener la parte real del resultado en 4.
6. Multiplicar el resultado en 5 por $(-1)^{x+y}$

H(u,v) es llamado filtro porque suprime ciertas frecuencias de la transformada, pero deja otras sin cambio.

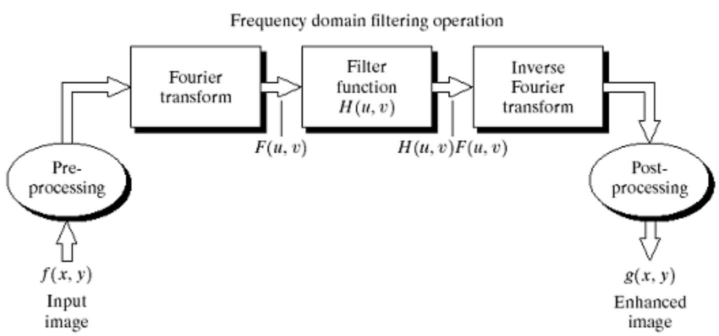
La transformada de Fourier de la imagen de salida es entonces dada por la siguiente ecuación:

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$$

La multiplicación de H y F se hace entre funciones bidimensionales y está definida elemento por elemento. Esto es, el primer elemento de H se multiplica por el primer elemento de F, y así.[2]

La imagen filtrada se obtiene tomando la parte real de este resultado y multiplicando por $(-1)^{x+y}$. La transformada inversa es en general, compleja, sin embargo, si la imagen de entrada y la función de filtro son reales, los componentes imaginarios de la transformada inversa deberían ser cero[3].

Además de esta multiplicación se suele practicar algo más de procesamiento, como cortar la imagen para que tenga dimensiones pares, escalación de nivel de gris, conversión a punto flotante, etc.



4.5 Pasos básicos del filtrado

Algunos filtros básicos y sus propiedades

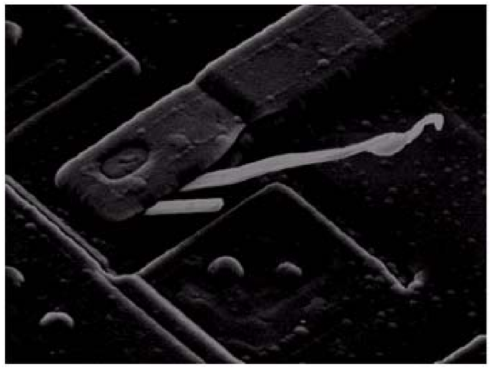
Veremos algunos filtros específicos y cómo éstos afectan a las imágenes.
Supóngase que se requiere forzar el promedio del valor de la imagen a cero. De acuerdo con lo visto, el valor promedio está dado por F(0,0). Si ponemos este término en cero en el dominio de la frecuencia y tomamos la transformada inversa, el valor promedio de la imagen resultante será cero. Asumiendo que la transformada se ha centrado, podemos llevar a cabo esta operación multiplicando todos los valores de F(u, v) por la función de filtro:

---

[2] En general, los componentes de F son cantidades complejas pero los filtros con los que trataremos en el libro serán, típicamente, reales. En este caso, cada componente de H multiplica los valores real e imaginario de la componente correspondiente en F. Estos filtros son llamados *filtros de cambio de fase cero* porqu no alteran la fase de la transformada.
[3] En la práctica, la DFT inversa generalmente tiene componentes imaginarios parásitos por redondeo computacional. Ignoraremos estos componentes.

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } (u, v) = (M/2, N/2) \\ 1 & \text{en los demás casos.} \end{cases} \qquad (4.2\text{-}29)$$

Lo que hará que F(0,0) sea cero y los demás componentes queden igual. Este filtro es llamado filtro de muesca (*notch filter)* porque es una función constante con un agujero en el origen.



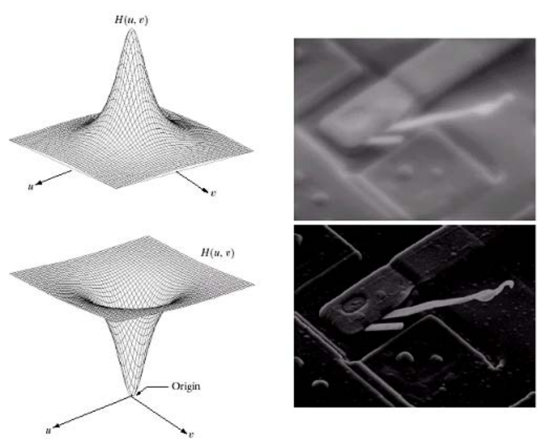
4.6 Imagen filtrada con el filtro de muesca de la imagen 4.4

En el ejemplo podemos ver el efecto de este filtro: en general disminuye el nivel de gris y los bordes prominentes resaltan más.

Las bajas frecuencias en la transformada de Fourier son responsables de la apariencia general de nivel de gris de una imagen en las áreas suaves, mientras que las altas frecuencias son responsables de los detalles, como los bordes y el ruido.
Más adelante se verán estos ejemplos con más detalle.

Un filtro que atenúa las altas frecuencias mientras deja pasar las bajas se llama filtro pasabajas.
Un filtro con las caracteríasticas opuestas es llamado pasaaltas.

Un filtro pasabajas tendrá detalles menos finos que el original porque se han atenuado las altas frecuencias. Una imagen filtrada con pasabajas tendrá menos variaciones suaves de nivel de gris porque se ha enfatizado el detalle transicional de nivel de gris.



4.7 Filtros pasabajas y pasaaltas y las imágenes obtenidas con ellos a partir de 4.4

Los filtros mostrados H(u,v) son simétricamente circulares.
En la primer imagen podemos observar su equivalencia con el filtro de suavizado anteriormente visto.
La segunda acentúa detalles finos, con F(0,0) en cero y sus consecuencias. Usualmente se suma una constante para no eliminar F(0,0) completamente.

4.2.4 Correspondencia entre el filtrado en los dominios espacial y de frecuencia

La relación fundamental entre el dominio espacial y el de frecuencia está establecido por un resultado llamado el *teorema de convolución*.

El proceso por el cuál movemos una máscara de pixel a pixel en una imagen y calculamos una cantidad predefinida para cada pixel, es el fundamento del proceso de convolución.

Formalmente la convolución discreta de 2 funciones f(x, y) y h(x,y) de tamaño M x N se denota por f(x, y) * h(x, y) y se define por la expresión

$$f(x,y) * h(x,y) = {}^{1}/_{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)\, h(x - m, y - n) \qquad (4.2\text{-}16)$$

Los signos menos significan que la función h está reflejada con respecto al origen.
Esta ecuación es básicamente una implementación de
1 – reflejar una función respecto al origen
2 – mover la función respecto a la otra al cambiar los valores de (x, y)
3 – calcular la suma de los productos de todos los valores de m y n, para cada desplazamiento x, y (los desplazamientos x , y son incrementos enteros que se detienen cuando las funciones ya no están traslapadas.